



Modell t -kongenerischer Tests

Definition: Annahmen (a₃) und (b)

(a₃) t -Kongenerität $t_i = \lambda_{ij0} + \lambda_{ij1} t_j$, $\lambda_{ij0}, \lambda_{ij1} \in \mathbb{R}$, $\lambda_{ij1} > 0$

(b) unkorrelierte Fehler $Cov(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = 0$, $i \neq j$

Aus (a₃) folgt die Existenz einer latenten Variablen \mathbf{h} mit

$$t_i = \lambda_{i1} \mathbf{h} - \lambda_{i0}^*$$

bzw.

$$Y_i = \lambda_{i1} \mathbf{h} - \lambda_{i0}^* + \mathbf{e}_i$$

Denn $\mathbf{h} := t_1$, $\lambda_{i0}^* := \lambda_{i10}$ und $\lambda_{i1} := \lambda_{i11}$ oder auch

z. B. $\mathbf{h}' := t_2$, $\lambda_{i0}^* := \lambda_{i20}$ und $\lambda_{i1} := \lambda_{i21}$.

Klassische Parametrisierung:

$$Y_i = \lambda_{i0} + \lambda_{i1} \mathbf{h} + \mathbf{e}_i$$



Modell t -kongenerischer Tests

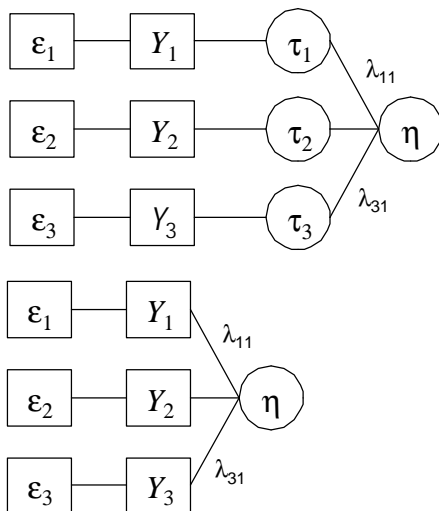
Fixierung der Skala von \mathbf{h}

Entweder $E(\mathbf{h}) = 0$ und $Var(\mathbf{h}) = 1$

oder $\lambda_{10} = 0$ und $\lambda_{11} = 1$.



Modell t -kongenerischer Tests



Modell t -kongenerischer Tests

Tabelle. Illustration der Beziehung zwischen manifesten und latenten Variablen im Modell t -kongenerischer Tests

Person	True scores		latent scores	Meßwerte		Fehlerwerte		
u	h		Y_1	Y_2			$P(Y_i=y_i U=u)$	
1	12	23	34	10	20	-2	-3	1/9
				12	24	0	1	1/9
				14	25	2	2	1/9
2	10	20	30	7	15	-3	-5	1/9
				9	22	-1	2	1/9
				14	23	4	3	1/9
3	8	17	26	3	14	-5	-3	1/9
				10	15	2	-2	1/9
				11	22	3	5	1/9

Anmerkung: Fiktive Zahlen. Jede der 3 Personen hat ihre eigene (intra-individuelle) Verteilung der Y -Variablen, aber jeweils nur einen einzigen Wert auf jeder der latenten Variablen t_i and η .



Modell **t**-kongenerischer Tests

Implizierte Kovarianzstruktur

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Y_i, Y_j) &= \text{Cov}(\lambda_{i0} + \lambda_{i1}\mathbf{h} + \mathbf{e}_i, \lambda_{j0} + \lambda_{j1}\mathbf{h} + \mathbf{e}_j) \\ &= \lambda_{i1}\lambda_{j1} \text{Var}(\mathbf{h}), \quad i \neq j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(Y_i) &= \text{Var}(\lambda_{i1}\mathbf{h} + \mathbf{e}_i) \\ &= \lambda_{i1}^2 \text{Var}(\mathbf{h}) + \text{Var}(\mathbf{e}_i) \end{aligned}$$



Modell **t**-kongenerischer Tests

Implizierte Kovarianzstruktur für 3 Tests

$$\begin{bmatrix} \lambda_{11}^2 \sigma_{\mathbf{h}}^2 + \sigma_{\mathbf{e}_1}^2 & & \\ \lambda_{11}\lambda_{12} \sigma_{\mathbf{h}}^2 & \lambda_{12}^2 \sigma_{\mathbf{h}}^2 + \sigma_{\mathbf{e}_2}^2 & \\ \lambda_{11}\lambda_{13} \sigma_{\mathbf{h}}^2 & \lambda_{12}\lambda_{13} \sigma_{\mathbf{h}}^2 & \lambda_{13}^2 \sigma_{\mathbf{h}}^2 + \sigma_{\mathbf{e}_3}^2 \end{bmatrix}$$



Modell t -kongenerischer Tests

$$\frac{\text{Cov}(Y_1, Y_2) \cdot \text{Cov}(Y_3, Y_1)}{\text{Cov}(Y_2, Y_3)} = \frac{\lambda_{11}\lambda_{12} \cdot \lambda_{11}\lambda_{13}}{\lambda_{12}\lambda_{13}} = \lambda_{11}^2$$



Modell t -kongenerischer Tests

$$I_{il} = \sqrt{\frac{\text{Cov}(Y_i, Y_j) \text{Cov}(Y_i, Y_k)}{\text{Cov}(Y_j, Y_k)}}, i \neq j, i \neq k, j \neq k$$



Modell **t**-kongenerischer Tests

Identifikation für den Fall der Fixierung der Skala von **h** durch: $E(\mathbf{h}) = 0$ and $Var(\mathbf{h}) = 1$.

$$Var(\mathbf{e}_i) = Var(Y_i) - \lambda_{i1}^2$$

$$Rel(Y_i) = \lambda_{i1}^2 / Var(Y_i)$$

$$\ddot{e}_{il} = \frac{Cov(Y_i, Y_j) Cov(Y_i, Y_k)}{Cov(Y_j, Y_k)}, i \neq j, i \neq k, j \neq k$$



Modell **t**-kongenerischer Tests

Testbarkeit

in der Gesamtpopulation

$$\frac{Cov(Y_i, Y_k)}{Cov(Y_j, Y_k)} = \frac{Cov(Y_i, Y_l)}{Cov(Y_j, Y_l)}, i \neq k, i \neq l, j \neq k, j \neq l$$

zwischen Subpopulationen

$$\frac{E^{(1)}(Y_i) - E^{(2)}(Y_i)}{E^{(1)}(Y_j) - E^{(2)}(Y_j)} = \frac{E^{(3)}(Y_i) - E^{(4)}(Y_i)}{E^{(3)}(Y_j) - E^{(4)}(Y_j)}$$



Modell t -kongenerischer Tests

Box 13.1. Das Wichtigste zum Modell τ -kongenerischer Variablen

Grundannahmen

(a) t -Kongenerität

subtr. Parametrisierung $t_i = \lambda_{i1}(\mathbf{h} - \lambda_i), \quad \lambda_i, \lambda_{i1} \in \mathbb{R}, \quad \lambda_{i1} > 0$

klass. Parametrisierung $t_i = \lambda_{i0} + \lambda_{i1} \mathbf{h}, \quad \lambda_{i0}, \lambda_{i1} \in \mathbb{R}, \quad \lambda_{i1} > 0$

(b) unkorrelierte Fehler

$$\text{Cov}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = 0, \quad i \neq j$$

Eindeutigkeit

\mathbf{h} und λ_i sind durch (a) bis auf positive lineare Transformationen, die Koeffizienten λ_{i1} eindeutig bis auf Ähnlichkeitstransformationen definiert.



Modell t -kongenerischer Tests

Bedeutsamkeit

Invariant unter den zulässigen Transformationen sind z.B. Aussagen über

$$\frac{\mathbf{h}(\omega_1) - \mathbf{h}(\omega_2)}{\mathbf{h}(\omega_3) - \mathbf{h}(\omega_4)} = \frac{\lambda_{i1}}{\lambda_{j1}} \lambda_{i1}^2 \text{Var}(\mathbf{h})$$

Testbarkeit

Die Modellannahme (a) allein impliziert:

(1) Erwartungswertstruktur in Subpopulationen

$$\frac{E^{(1)}(Y_i) - E^{(2)}(Y_i)}{E^{(1)}(Y_j) - E^{(2)}(Y_j)} = \frac{E^{(3)}(Y_i) - E^{(4)}(Y_i)}{E^{(3)}(Y_j) - E^{(4)}(Y_j)}$$

Die Modellannahmen (a) und (b) implizieren:

(2) Gleichheit bestimmter Kovarianzverhältnisse in Gesamtpopulation

$$\frac{\text{Cov}(Y_i, Y_k)}{\text{Cov}(Y_j, Y_k)} = \frac{\text{Cov}(Y_i, Y_l)}{\text{Cov}(Y_j, Y_l)}, \quad i \neq k, \quad i \neq l, \quad j \neq k, \quad j \neq l$$



Modell **t**-kongenerischer Tests

Bestimmung der
theoretischen Größen

$$\lambda_{ii}^2 \text{Var}(\mathbf{h}) = \frac{\text{Cov}(Y_i, Y_j) \cdot \text{Cov}(Y_i, Y_k)}{\text{Cov}(Y_j, Y_k)},$$

$$i \neq j, \quad i \neq k, \quad j \neq k,$$

$$\text{Var}(\mathbf{e}_i) = \text{Var}(Y_i) - \lambda_{ii}^2$$

$$\text{Var}(\mathbf{e}_i) = \text{Var}(Y_i) - \lambda_{ii}^2 \text{Var}(\mathbf{h})$$

$$\text{Rel}(Y_i) = \frac{\lambda_{ii}^2 \text{Var}(\mathbf{h})}{\text{Var}(Y_i)}$$



Modell **t**-kongenerischer Tests

Tabelle 14.1. Kovarianzen (untere Dreiecksmatrix), Korrelationen (obere Dreiecksmatrix) und Mittelwerte der Wohlbefindens-Testteile in der Gesamtstichprobe

Meßgelegenheit		Meßgelegenheit 1		Meßgelegenheit 2	
		WT ₁	WT ₂	WT ₃	WT ₄
1	WT ₁	3.18	.74	.64	.49
1	WT ₂	2.44	3.39	.58	.66
2	WT ₃	1.89	1.78	2.78	.68
2	WT ₄	1.42	1.96	1.83	2.63
Mittelwerte		6.74	7.18	6.96	7.31

Anmerkungen: Die Testteile WT₁ und WT₃ bestehen aus den Items 1, 11 und 20, die Testteile WT₂ und WT₄ aus den Items 2, 15 und 17 des STAI



Modell t -kongenerischer Tests

Tabelle 14.2. Die vom Modell implizierten Kovarianzen (untere Dreiecksmatrix) der Wohlbefindens-Testteile in der Gesamtstichprobe

Meßgelegenheit		Meßgelegenheit 1		Meßgelegenheit 2	
		WT_1	WT_2	WT_3	WT_4
1	WT_1	3.17			
1	WT_2	2.18	3.36		
2	WT_3	1.86	2.10	2.78	
2	WT_4	1.71	1.93	1.65	2.65

Anmerkungen: Zur Notation siehe Tabelle 14.1.