



Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie

- Zufallsexperiment
- Zufallsvariable
- Verteilung
- Erwartungswert
- Varianz, Kovarianz und Korrelation
- Bedingte Erwartung (Regression)



Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie

Definition 5.1. Sei X eine reellwertige Zufallsvariable auf dem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{A}, P)

mit endlich vielen Werten x_1, \dots, x_n . Dann heißt die Zahl

$$E(X) := \sum_{i=1}^n x_i \cdot P(X = x_i)$$

der *Erwartungswert* von X (bezüglich P).

Im Spezialfall, in dem alle Werte von X mit gleicher Wahrscheinlichkeit $P(X = x_i) = 1/n$ auftreten, vereinfacht sich die Gleichung zu

$$E(X) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$



Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie

Rechenregeln für Erwartungswerte

(i) $E(\alpha) = \alpha$

(ii) $E(\alpha X + \beta Y) = \alpha E(X) + \beta E(Y)$



Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie

Box 5.2. Das Wichtigste zur Varianz

A. Definitionen

Sei X eine numerische Zufallsvariable auf $\langle \Omega, A, P \rangle$ mit endlichem Erwartungswert.

$$\text{Var}(X) := E[[X - E(X)]^2]$$

Die *Varianz* von X ist der Erwartungswert der quadrierten Abweichungsvariablen $X - E(X)$. Die *Standardabweichung* von X ist die positive Quadratwurzel aus der Varianz.

$$\text{Std}(X) := +\sqrt{\text{Var}(X)}$$



Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie

Rechenregeln für Varianzen

- (i) $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$
- (ii) $Var(X) = 0$, if $X = \alpha$
- (iii) $Var(\alpha X) = \alpha^2 Var(X)$
- (iv) $Var(\alpha + X) = Var(X)$
- (v) $Var(\alpha X + \beta Y) = \alpha^2 Var(X) + \beta^2 Var(Y) + 2\alpha\beta Cov(X, Y)$



Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie

Das Wichtigste zu Kovarianz und Korrelation

A. Definitionen

$$Cov(X, Y) := E[(X - E(X)) \cdot (Y - E(Y))]$$

Die Kovarianz von X und Y ist der Erwartungswert des Produkts der Abweichungsvariablen

$X - E(X)$ und $Y - E(Y)$.

$$Kor(X, Y) := \begin{cases} \frac{Cov(X, Y)}{Std(X) \cdot Std(Y)}, & \text{falls } Std(X) \text{ und } Std(Y) > 0 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Korrelation von X und Y ist die Kovarianz geteilt durch das Produkt der beiden Standardabweichungen.

Oder, die Korrelation ist der Erwartungswert des Produkts der standardisierten (z -transformierten)

Abweichungsvariablen $X - E(X)$ und $Y - E(Y)$.



Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie

Rechenregeln für Kovarianzen

- (i) $Cov(X, Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y)$
- (ii) $Cov(X, Y) = 0$, if $X = \alpha$
- (iii) $Cov(\alpha X, \beta Y) = \alpha \beta Cov(X, Y)$
- (iv) $Cov(\alpha + X, \beta + Y) = Cov(X, Y)$
- (v) $Cov(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2, \beta_1 Y_1 + \beta_2 Y_2)$
 $= \alpha_1 \beta_1 Cov(X_1, Y_1) + \alpha_1 \beta_2 Cov(X_1, Y_2)$
 $+ \alpha_2 \beta_1 Cov(X_2, Y_1) + \alpha_2 \beta_2 Cov(X_2, Y_2)$



Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie

Box 6.4. Die wichtigsten Definitionen zum bedingten Erwartungswert und zur Regression

<i>Bedingter Erwartungswert</i>	Bei diskretem Y und $P(X = x) > 0$:
$E(Y X = x)$	$E(Y X = x) := \sum_{i=1}^n y_i \cdot P(Y = y_i X = x)$
<i>Regression oder bedingte Erwartung</i>	$E(Y X)$ ist diejenige Zufallsvariable, deren Werte die bedingten Erwartungswerte $E(Y X = x)$ sind, d.h. sie ist eine Funktion von X . Dabei heißt Y der <i>Regressand</i> und X der <i>Regressor</i> , der auch aus mehreren Zufallsvariablen X_1, \dots, X_m bestehen kann
<i>Residuum e</i>	$e := Y - E(Y X)$ ist die nicht durch die Regression $E(Y X)$ determinierte Komponente von Y



Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie

Determinations-
koeffizient $R_{Y|X}^2$

$$R_{Y|X}^2 := \begin{cases} \frac{\text{Var}[E(Y|X)]}{\text{Var}(Y)}, & \text{falls } \text{Var}(Y) > 0, \text{ und} \\ 0, & \text{andernfalls.} \end{cases}$$

$R_{Y|X}^2$ ist der durch die Regression $E(Y|X)$ determinierte Varianzanteil von Y .
Er gibt die Stärke der regressiven Abhängigkeit an, ist invariant unter eindeutigen Abbildungen von X und unter linearen Transformationen von Y .

Multiple Korrelation
 $R_{Y|X}$

$$R_{Y|X} = \sqrt{R_{Y|X}^2}$$

Regressive

$$E(Y|X) = E(Y)$$

Unabhängigkeit



Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie

Rechenregeln für Regressionen

- (i) $E(\alpha | X) = \alpha$
- (ii) $E(\alpha Y_1 + \beta Y_2 | X) = \alpha E(Y_1 | X) + \beta E(Y_2 | X)$
- (iii) $E[E(Y | X)] = E(Y)$
- (iv) $E[f(X) | X] = f(X)$, falls $f(X)$ numerisch ist
- (v) $E[E(Y | X) | f(X)] = E[Y | f(X)]$
- (vi) $E[f(X) Y | X] = f(X) E(Y | X)$, falls $f(X)$ numerisch ist



Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie

Eigenschaften des Residuums

- (i) $E(\mathbf{e}) = 0$
- (ii) $Cov[\mathbf{e}, E(Y | X)] = 0$
- (iii) $Var(Y) = Var[E(Y | X)] + Var(\mathbf{e})$
- (iv) $E(\mathbf{e} | X) = 0$
- (v) $E[\mathbf{e} f(X)] = 0$
- (vi) $Cov[\mathbf{e}, f(X)] = 0$, falls $f(X)$ numerisch ist