



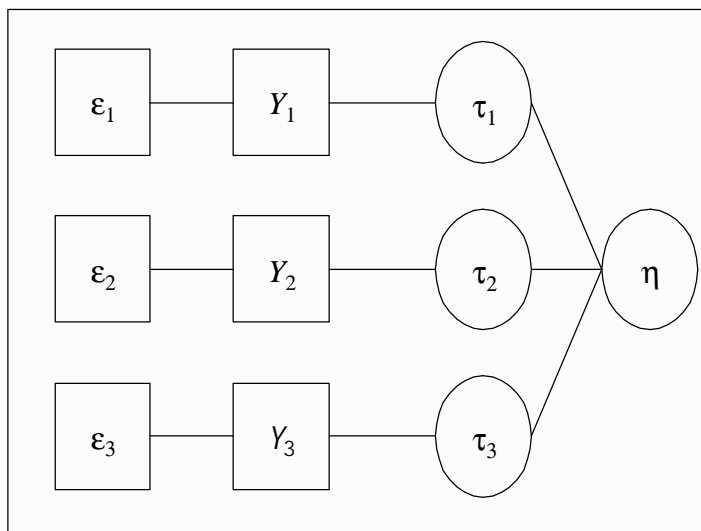
Das Modell paralleler Tests

Definition: Annahmen (a₁), (b) und (c)

- (a₁) t -Äquivalenz $\mathbf{t}_i = \mathbf{t}_j$
- (b) unkorrelierte Fehler $Cov(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = 0, i \neq j$
- (c) gleiche Fehlervarianzen $Var(\mathbf{e}_i) = Var(\mathbf{e}_j)$

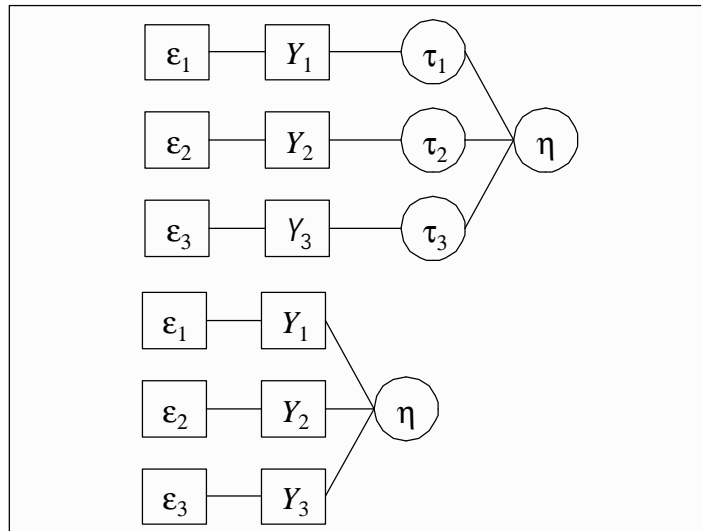


Das Modell paralleler Tests





Das Modell paralleler Tests



Das Modell paralleler Tests

Implizierte Kovarianzstruktur

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Y_1, Y_2) &= \text{Cov}(\mathbf{h} + \mathbf{e}_1, \mathbf{h} + \mathbf{e}_2) \\ &= \text{Cov}(\mathbf{h}, \mathbf{h}) + \text{Cov}(\mathbf{h}, \mathbf{e}_2) \\ &\quad + \text{Cov}(\mathbf{e}_1, \mathbf{h}) + \text{Cov}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \\ &= \text{Var}(\mathbf{h}) =: \sigma_h^2 \end{aligned}$$

$$\text{Var}(Y_i) - \text{Cov}(Y_1, Y_2) = \text{Var}(\mathbf{e}_i) =: \sigma_e^2$$



Das Modell paralleler Tests

Implizierte Kovarianzstruktur bei 3 parallelen Tests

$$\begin{bmatrix} \sigma_h^2 + \sigma_e^2 & \sigma_h^2 & \sigma_h^2 \\ \sigma_h^2 & \sigma_h^2 + \sigma_e^2 & \sigma_h^2 \\ \sigma_h^2 & \sigma_h^2 & \sigma_h^2 + \sigma_e^2 \end{bmatrix}$$



Das Modell paralleler Tests

Identifikation

- $E(\mathbf{h}) = E(Y_i)$
- $Var(\mathbf{h}) = Cov(Y_i, Y_j), \quad i \neq j$
- $Var(\mathbf{e}_i) = Var(Y_i) - Cov(Y_i, Y_j), \quad i \neq j$
- $Rel(Y_i) = Corr(Y_i, Y_j), \quad i \neq j$



Das Modell paralleler Tests

Testbarkeit in der Gesamtpopulation

$$E(Y_i) = \mu$$

$$\text{Var}(Y_i) = \sigma_Y^2$$

$$\text{Cov}(Y_i, Y_j) = \sigma_\eta^2$$

Testbarkeit in jeder Subpopulation s

$$E^{(s)}(Y_i) = \mu^{(s)}$$

Innerhalb jeder Subpopulation (s) sind die Erwartungswerte also für alle Testwertvariablen Y_i gleich, zwischen verschiedenen Subpopulation können sie dagegen verschieden sein.



Das Modell paralleler Tests

Testverlängerung $S = Y_1 + \dots + Y_m$

Annahmen (a) – (c) implizieren:

Spearman-Brown-Formel

$$\text{Rel}(S) = \frac{m \cdot \text{Rel}(Y_i)}{1 + (m-1) \cdot \text{Rel}(Y_i)}$$

Untere Schranke der Reliabilität

Annahme (b) impliziert:

von $S = Y_1 + \dots + Y_m$

Cronbachs α

$$\alpha := \frac{m}{m-1} \left[1 - \frac{\sum_{i=1}^m \text{Var}(Y_i)}{\text{Var}(S)} \right]$$