



## Teil I: Wahrscheinlichkeitstheorie

1

- Kapitel 2. Wahrscheinlichkeit (wird heute behandelt)
- Kapitel 3: Bedingte Wahrscheinlichkeit
- Kapitel 4: Zufallsvariablen
- Kapitel 5: Erwartungswerte, Varianz, Kovarianz und Korrelation



## Kapitel 2. Wahrscheinlichkeit

2

### Überblick

- Beispiele
- Wahrscheinlichkeitsraum
- Eigenschaften der Wahrscheinlichkeit



## Beispiele

3

Beispiel 1: Münzwurf

$$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_6\}$$

Beispiel 2: zweifacher Münzwurf

$$\Omega = \{(K, K), (K, Z), (Z, K), (Z, Z)\}$$

Beispiel 3: Psychologisches Testen

$$\Omega = \Omega_U \times \Omega_O$$

Beispiel 4: Ein typisches psychologisches Experiment

$$\Omega = \Omega_U \times \Omega_X \times \Omega_Y$$



## Wahrscheinlichkeitsraum

4

Ein *Wahrscheinlichkeitsraum* repräsentiert das beobachtete Zufallsexperiment. Er besteht aus den folgenden drei Komponenten

- die *Menge der möglichen Ergebnisse* des betrachteten Zufallsexperiments
- die *Menge der möglichen Ereignisse* und
- das *Wahrscheinlichkeitsmaß*



## Zufallsexperiment, Ergebnis, Ereignis und Wahrscheinlichkeit

5

Der Wahrscheinlichkeitsraum  $\langle \Omega, \mathfrak{A}, P \rangle$  repräsentiert das betrachtete

Zufallsexperiment, wobei:

- $\Omega$  die Menge aller möglichen Ergebnisse eines Zufallsexperiments
- $\mathfrak{A}$  die Menge aller möglichen Ereignisse  $A \subset \Omega$  und
- $P: \mathfrak{A} \rightarrow [0, 1]$  das Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $\mathfrak{A}$



## Die Menge der möglichen Ergebnisse

6

Beispiel 1: Münzwurf

$$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_6\}$$

Beispiel 2: zweifacher Münzwurf

$$\Omega = \{(K, K), (K, Z), (Z, K), (Z, Z)\}$$

Beispiel 3: psychologisches Testen

$$\Omega = \Omega_U \times \Omega_O$$



## Die Menge der möglichen Ereignisse: Beispiel 1

7

Mögliche Ereignisse sind immer Teilmengen der Menge der möglichen Ergebnisse  $\Omega$

Beispiel 1 (zweifacher Münzwurf):

$$\Omega = \{\emptyset, \Omega, \{(K, K)\}, \{(K, Z), (Z, K), (Z, Z)\}\}$$



## Die Menge der möglichen Ereignisse: Beispiel 2

8

zweifacher Münzwurf

Die Menge aller Teilmengen von  $\Omega$

$$\mathfrak{A} := \{\emptyset, \Omega, \{\langle Z, Z \rangle\}, \{\langle Z, K \rangle\}, \{\langle K, Z \rangle\}, \{\langle K, K \rangle\}, \\ \{\langle Z, Z \rangle, \langle Z, K \rangle\}, \{\langle Z, Z \rangle, \langle K, Z \rangle\}, \{\langle Z, Z \rangle, \langle K, K \rangle\}, \\ \{\langle Z, K \rangle, \langle K, Z \rangle\}, \{\langle Z, K \rangle, \langle K, K \rangle\}, \{\langle K, Z \rangle, \langle K, K \rangle\}, \\ \{\langle Z, Z \rangle, \langle Z, K \rangle, \langle K, Z \rangle\}, \{\langle Z, Z \rangle, \langle Z, K \rangle, \langle K, K \rangle\}, \\ \{\langle Z, Z \rangle, \langle K, Z \rangle, \langle K, K \rangle\}, \{\langle Z, K \rangle, \langle K, Z \rangle, \langle K, K \rangle\}\}$$



## Einige mögliche Ereignisse beim psychologischen Testen: Beispiel

9

**Tabelle 2.1.**

Einige Ereignisse und ihre formalsprachliche Darstellung

| Inhaltliches Ereignis                         | Formale Darstellung als<br>Teilmenge von $\Omega = \Omega_U \times \Omega_O$ |
|-----------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------|
| Fritz wird gezogen                            | $\{\text{Fritz}\} \times \Omega_O$                                           |
| Fritz oder Franz werden<br>gezogen            | $\{\text{Fritz}, \text{Franz}\} \times \Omega_O$                             |
| Die erste Aufgabe wird gelöst                 | $\Omega_U \times \{+\} \times \{+, -\}$                                      |
| Fritz wird gezogen und löst<br>beide Aufgaben | $\{\langle \text{Fritz}, +, + \rangle\}$                                     |



## Anwendung und Interpretation

10

- Problem: Wahrscheinlichkeiten sind in der Regel unbekannt
- Ziel: Schätzung der Wahrscheinlichkeiten oder anderer Kenngrößen
- Wahrscheinlichkeiten sind *theoretische* Größen
- Beispiel: Münzwurfexperiment



## Definition $\sigma$ -Algebra

11

### Definition 2.1.

Sei  $\mathfrak{A}$  eine Menge von Teilmengen einer Menge  $\Omega$ . Die Menge  $\mathfrak{A}$  heißt dann  $\sigma$ -Algebra, wenn gelten:

- (a)  $\Omega \in \mathfrak{A}$ ;
- (b) wenn  $A \in \mathfrak{A}$ , dann  $\bar{A} \in \mathfrak{A}$  ( $\bar{A}$  ist das Komplement von  $A$ );
- (c) wenn  $A_1, A_2, \dots$  eine Folge von Elementen aus  $\mathfrak{A}$  ist, dann ist auch deren Vereinigung  $A_1 \cup A_2 \cup \dots$  Element von  $\mathfrak{A}$ .



## Definition Wahrscheinlichkeit, usw. 1

12

### Definition 2.2

Seien  $\mathfrak{A}$  eine  $\sigma$ -Algebra auf einer Menge  $\Omega$  sowie  $P: \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion auf  $\mathfrak{A}$ .

Man betrachte die Bedingungen (Kolmogoroff-Axiome):

- (a)  $P(A) \geq 0$ , für alle  $A \in \mathfrak{A}$ ; *Nichtnegativität*
- (b) ist  $A_1, A_2, \dots$  eine Folge paarweise disjunkter Mengen  $A_i \in \mathfrak{A}$ ,  
dann gilt:  $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots$   *$\sigma$ -Additivität*
- (c)  $P(\Omega) = 1$ . *Normierung*



Wenn die Bedingungen (a) bis (c) gelten, heißen:

- (i) die Funktion  $P$  „Wahrscheinlichkeitsmaß“,
- (ii) das Tripel  $\langle \Omega, \mathfrak{A}, P \rangle$  „Wahrscheinlichkeitsraum“,
- (iii) die Elemente  $A_i \in \mathfrak{A}$  „Ereignisse“,
- (iv) der Wert  $P(A)$  „Wahrscheinlichkeit des Ereignisses  $A$ “,
- (v) die Mengen  $\{\omega\}$ ,  $\omega \in \Omega$ , „Elementarereignisse“ und
- (vi) die Menge  $\Omega$  die „Menge der möglichen Ergebnisse“.



## Beispiel für einen Wahrscheinlichkeitsraum

$$\Omega = \{(K, K), (K, Z), (Z, K), (Z, Z)\}$$

**Tabelle 2.2**

Ereignisse und ihre Wahrscheinlichkeiten beim zweimaligen Münzwurf

| $A_i \in \mathfrak{A}$                | $P(A_i)$                         | Anmerkung                |
|---------------------------------------|----------------------------------|--------------------------|
| $A_0 = \emptyset$                     | 0                                |                          |
| $A_1 = \Omega$                        | 1                                | Bedingung (c) der Def. 2 |
| $A_2 = \{(K, K)\}$                    | 1/4                              | faire Münze!             |
| $A_3 = \{(K, Z)\}$                    | 1/4                              | dto.                     |
| $A_4 = \{(Z, K)\}$                    | 1/4                              | dto.                     |
| $A_5 = \{(Z, Z)\}$                    | 1/4                              | dto.                     |
| $A_6 = \{(K, K), (K, Z)\}$            | $P(A_2) + P(A_3) = 1/2$          | Bedingung (b) der Def. 2 |
| $A_7 = \{(K, K), (Z, K)\}$            | $P(A_2) + P(A_4) = 1/2$          | dto.                     |
| $A_8 = \{(K, K), (Z, Z)\}$            | $P(A_2) + P(A_5) = 1/2$          | dto.                     |
| $A_9 = \{(K, Z), (Z, K)\}$            | $P(A_3) + P(A_4) = 1/2$          | dto.                     |
| $A_{10} = \{(K, Z), (Z, Z)\}$         | $P(A_3) + P(A_5) = 1/2$          | dto.                     |
| $A_{11} = \{(Z, K), (Z, Z)\}$         | $P(A_4) + P(A_5) = 1/2$          | dto.                     |
| $A_{12} = \{(K, K), (K, Z), (Z, K)\}$ | $P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) = 3/4$ | dto.                     |
| $A_{13} = \{(K, K), (K, Z), (Z, Z)\}$ | $P(A_2) + P(A_3) + P(A_5) = 3/4$ | dto.                     |
| $A_{14} = \{(K, K), (Z, K), (Z, Z)\}$ | $P(A_2) + P(A_4) + P(A_5) = 3/4$ | dto.                     |
| $A_{15} = \{(K, Z), (Z, K), (Z, Z)\}$ | $P(A_3) + P(A_4) + P(A_5) = 3/4$ | dto.                     |



## Theorem 2.1

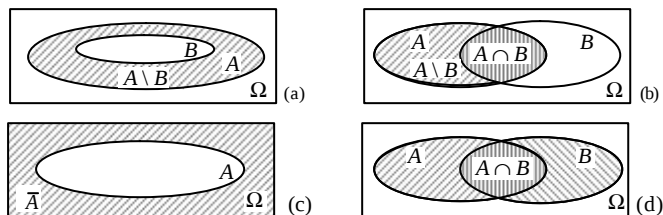
Seien  $\langle \Omega, \mathfrak{A}, P \rangle$  ein Wahrscheinlichkeitsraum und

$A, B \in \mathfrak{A}$  Ereignisse. Dann gelten:

- (i) wenn  $B \subset A$ , dann  $P(A \setminus B) = P(A) - P(B)$  und  $P(A) \geq P(B)$  ;
- (ii)  $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$  ;
- (iii) für  $\bar{A} := \Omega \setminus A$  gilt:  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$  ;
- (iv)  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ .



## Eigenschaften der Wahrscheinlichkeit (Diagramm)



**Abbildung 2.1**

Venn-Diagramme zur Veranschaulichung der in Theorem 2.1 genannten Eigenschaften eines Wahrscheinlichkeitsmaßes