



### Definition 4.1

Seien  $\langle \Omega, \mathfrak{A}, P \rangle$  ein W-Raum,  $\Omega'$  eine Menge und  $\mathfrak{A}'$  eine

$\sigma$ -Algebra auf  $\Omega'$ . Eine Abbildung  $X: \Omega \rightarrow \Omega'$  heißt

*Zufallsvariable*, wenn für das Urbild  $X^{-1}(A')$  von jedem

$A' \in \mathfrak{A}'$  gilt:  $X^{-1}(A') \in \mathfrak{A}$ . Die Menge aller Urbilder  $X^{-1}(A')$

heißt die von  $X$  erzeugte  $\sigma$ -Algebra.



### Definition 4.2

Sei  $X: \Omega \rightarrow \Omega'$  eine Zufallsvariable auf  $\langle \Omega, \mathfrak{A}, P \rangle$ .

- (i) Ist die Menge  $X(\Omega)$  der Werte von  $X$  höchstens abzählbar unendlich, so heißt  $X$  *diskret*.
- (ii) Ist  $\Omega' \subset \mathbb{R}$ , so heißt  $X$  *reell* oder *reellwertig*.
- (iii) Gilt  $\Omega' \subset \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ , so heißt  $X$  *numerisch*.
- (iv) Ist  $\Omega' \subset \overline{\mathbb{R}}$  und ist die Menge  $X(\Omega)$  der Werte von  $X$  nicht endlich und nicht abzählbar unendlich, dann heißt  $X$  *stetig*.



### Definition 4.3

Seien  $\langle \Omega, \mathfrak{A}, P \rangle$  ein W-Raum,  $X: \Omega \rightarrow \Omega'$  eine Zufallsvariable auf  $\langle \Omega, \mathfrak{A}, P \rangle$  und  $\mathfrak{A}'$  eine  $\sigma$ -Algebra auf  $\Omega'$ . Dann heißt die durch

$$P^X(A') := P[X^{-1}(A')], \quad \text{für alle } A' \in \mathfrak{A}',$$

definierte Funktion  $P^X: \mathfrak{A}' \rightarrow \mathbb{R}$  *Verteilung* von  $X$  (hinsichtlich  $P$ ).



### Definition 4.4

Seien  $\langle \Omega, \mathfrak{A}, P \rangle$  ein W-Raum,  $X: \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  eine numerische Zufallsvariable auf  $\langle \Omega, \mathfrak{A}, P \rangle$  und  $\overline{\mathfrak{B}}$  die Borelsche  $\sigma$ -Algebra auf  $\overline{\mathbb{R}}$ . Die durch

$$F^X(\alpha) := P^X([-\infty, \alpha]), \quad \alpha \in \overline{\mathbb{R}},$$

definierte Funktion  $F^X: \overline{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt dann die *kumulative Verteilung* oder die *Verteilungsfunktion* von  $X$  (hinsichtlich  $P$ ).

**Definition 4.5**

Seien  $\langle \Omega, \mathfrak{A}, P \rangle$  ein W-Raum,  $X: \Omega \rightarrow \Omega'_X$  und  $Y: \Omega \rightarrow \Omega'_Y$  Zufallsvariablen,  $\mathfrak{A}'_X$  eine  $\sigma$ -Algebra auf  $\Omega'_X$  und  $\mathfrak{A}'_Y$  eine  $\sigma$ -Algebra auf  $\Omega'_Y$ . Dann heißen  $X$  und  $Y$  (stochastisch) *unabhängig* (hinsichtlich  $P$ ), wenn für alle  $(A', B') \in \mathfrak{A}'_X \times \mathfrak{A}'_Y$  gilt:

$$P[X^{-1}(A') \cap Y^{-1}(B')] = P[X^{-1}(A')] \cdot P[Y^{-1}(B')].$$

Andernfalls heißen  $X$  und  $Y$  (stochastisch) *abhängig*.

**Zusammenfassungsbox 1. Das Wichtigste zu Zufallsvariablen**

Eine *Zufallsvariable*  $X$  weist jedem Ergebnis  $\omega \in \Omega$  eines betrachteten Zufallsexperiments einen Wert in einer Menge  $\Omega'_X$  zu. Auf dieser Bildmenge muss auch eine  $\sigma$ -Algebra  $\mathfrak{A}'_X$  gegeben sein. Alle durch  $X$  darstellbaren Ereignisse, die Urbilder  $X^{-1}(\{A'\})$ ,  $A' \in \mathfrak{A}'_X$ , haben dabei eine (i. d. R. unbekannte) Wahrscheinlichkeit.

Das *Urbild*  $X^{-1}(A') := \{\omega \in \Omega: X(\omega) \in A'\}$  von  $A'$  unter  $X$  ist das Ereignis, dass  $X$  einen Wert in der Menge  $A'$  annimmt. Wir können es ein „durch  $X$  darstellbares Ereignis“ nennen.

Die *Verteilung*

$$P^X(A') := P[X^{-1}(A')], \quad \text{für alle } A' \in \mathfrak{A}'_X.$$

weist jedem durch  $X$  darstellbarem Ereignis seine Wahrscheinlichkeit zu..



Die *kumulative Verteilung*

$$F^X(\alpha) := P^X([-\infty, \alpha]), \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

weist jedem  $\alpha$  die Wahrscheinlichkeit zu, dass  $X$  einen Wert kleiner oder gleich  $\alpha$  annimmt.

Die *Unabhängigkeit* zweier Zufallsvariablen  $X$  und  $Y$  ist definiert durch:

$$P[X^{-1}(A') \cap Y^{-1}(B')] = P[X^{-1}(A')] \cdot P[Y^{-1}(B')] \\ \text{für alle } (A', B') \in \mathfrak{A}'_X \times \mathfrak{A}'_Y.$$

Alle durch  $X$  bzw.  $Y$  darstellbaren Ereignisse sind dann also unabhängig.