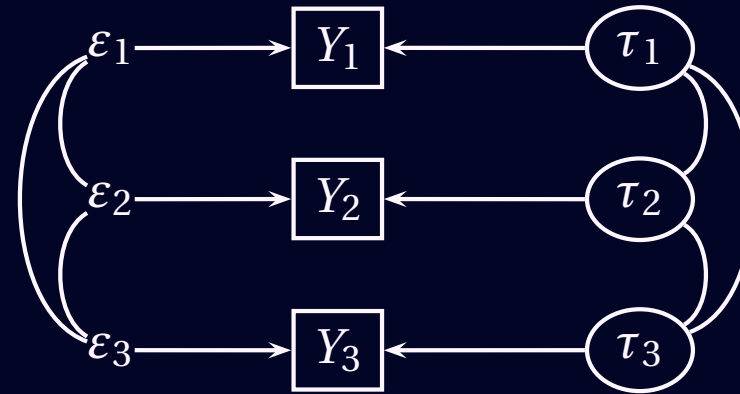


Einführung in die Testtheorie und Testkonstruktion

Prof. Dr. Rolf Steyer

Lehrstuhl für Methodenlehre und Evaluationsforschung - FSU Jena

21. April 2015



Ausgangspunkt

Modell paralleler Tests

Modell paralleler Tests

Ausgangspunkt

Modell paralleler Tests

Modell paralleler Tests

Pfaddiagramm

Implizierte Kovarianzstruktur

Implizierte Kovarianzmatrix

Identifikation

Testbarkeit

Spearman-Brown-Formel

Herleitung der

Spearman-Brown-Formel

Spearman-Brown-Formel

Annahmen (a₁), (b) und (c):

- (a₁) τ -Äquivalenz $\tau_i = \tau_j$
- (b) unkorrelierte Fehler $Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0, \quad i \neq j$
- (c) gleiche Fehlervarianzen $Var(\varepsilon_i) = Var(\varepsilon_j)$

Ausgangspunkt

Modell paralleler Tests

Modell paralleler Tests

Pfaddiagramm

Implizierte Kovarianzstruktur

Implizierte Kovarianzmatrix

Identifikation

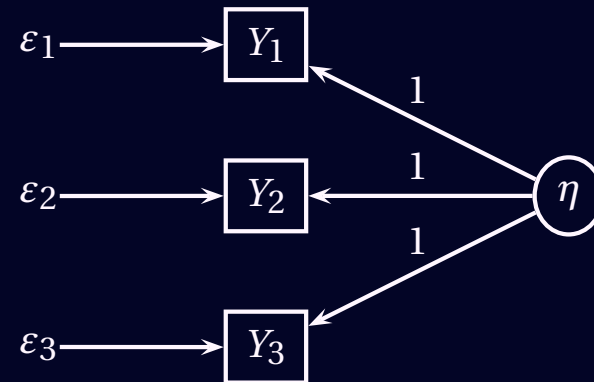
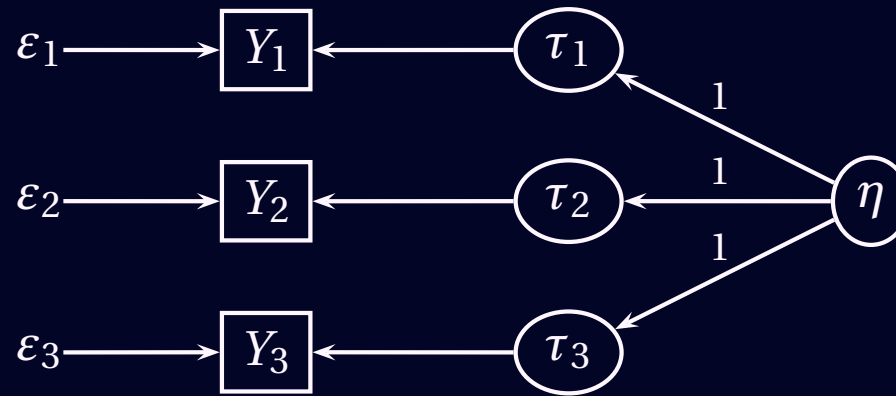
Testbarkeit

Spearman-Brown-Formel

Herleitung der

Spearman-Brown-Formel

Spearman-Brown-Formel



Ausgangspunkt

Modell paralleler Tests

Modell paralleler Tests

Pfaddiagramm

Implizierte Kovarianzstruktur

Implizierte Kovarianzmatrix

Identifikation

Testbarkeit

Spearman-Brown-Formel

Herleitung der

Spearman-Brown-Formel

Spearman-Brown-Formel

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Y_1, Y_2) &= \text{Cov}(\eta + \varepsilon_1, \eta + \varepsilon_2) \\ &= \text{Cov}(\eta, \eta) + \text{Cov}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) + \text{Cov}(\eta, \varepsilon_1) + \text{Cov}(\eta, \varepsilon_2) \\ &= \text{Var}(\eta) \\ &= : \sigma_{\eta}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(Y_i) - \text{Cov}(Y_1, Y_2) &= \text{Var}(\varepsilon_i) \\ &=: \sigma_{\varepsilon}^2 \end{aligned}$$

Ausgangspunkt

Modell paralleler Tests

Modell paralleler Tests

Pfaddiagramm

Implizierte Kovarianzstruktur

Implizierte Kovarianzmatrix

Identifikation

Testbarkeit

Spearman-Brown-Formel

Herleitung der

Spearman-Brown-Formel

Spearman-Brown-Formel

Implizierte Kovarianzstruktur bei 3 parallelen Tests:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{\eta}^2 + \sigma_{\varepsilon}^2 & \sigma_{\eta}^2 & \sigma_{\eta}^2 \\ \sigma_{\eta}^2 & \sigma_{\eta}^2 + \sigma_{\varepsilon}^2 & \sigma_{\eta}^2 \\ \sigma_{\eta}^2 & \sigma_{\eta}^2 & \sigma_{\eta}^2 + \sigma_{\varepsilon}^2 \end{bmatrix}$$

Ausgangspunkt

Modell paralleler Tests

Modell paralleler Tests

Pfaddiagramm

Implizierte Kovarianzstruktur

Implizierte Kovarianzmatrix

Identifikation

Testbarkeit

Spearman-Brown-Formel

Herleitung der

Spearman-Brown-Formel

Spearman-Brown-Formel

Die theoretischen Größen können wie folgt aus den empirischen berechnet werden:

$$E(\eta) = E(Y_i)$$

$$Var(\eta) = Cov(Y_i, Y_j), \quad i \neq j$$

$$Var(\varepsilon_i) = Var(Y_i) - Cov(Y_i, Y_j), \quad i \neq j$$

$$Rel(Y_i) = Kor(Y_i, Y_j), \quad i \neq j$$

Ausgangspunkt

Modell paralleler Tests

Modell paralleler Tests

Pfaddiagramm

Implizierte Kovarianzstruktur

Implizierte Kovarianzmatrix

Identifikation

Testbarkeit

Spearman-Brown-Formel

Herleitung der

Spearman-Brown-Formel

Spearman-Brown-Formel

Testbarkeit in der Gesamtpopulation

- $E(Y_i) = \mu$
- $Var(Y_i) = \sigma_Y^2$
- $Cov(Y_i, Y_j) = \sigma_\eta^2 \quad i \neq j.$

In der Gesamtpopulation sind die Erwartungswerte, Varianzen und Kovarianzen also für alle Testwertvariablen Y_i gleich.

Testbarkeit in jeder Subpopulation

- $E^{(s)}(Y_i) = \mu^{(s)}$
- $Var^{(s)}(Y_i) = \sigma_Y^{2(s)}$
- $Cov^{(s)}(Y_i, Y_j) = \sigma_\eta^{2(s)} \quad i \neq j.$

Innerhalb jeder Subpopulation s sind die Erwartungswerte, Varianzen und Kovarianzen also für alle Testwertvariablen Y_i gleich, zwischen *verschiedenen* Subpopulation können sie dagegen verschieden sein.

Ausgangspunkt

Modell paralleler Tests

Modell paralleler Tests

Pfaddiagramm

Implizierte Kovarianzstruktur

Implizierte Kovarianzmatrix

Identifikation

Testbarkeit

Spearman-Brown-Formel

Herleitung der

Spearman-Brown-Formel

Spearman-Brown-Formel

Testverlängerung $S := Y_1 + \dots + Y_m$

Annahmen (a₁), (b) und (c) implizieren:

Spearman-Brown-Formel

bei parallelen Tests:

$$Rel(S) = \frac{m \cdot Rel(Y)}{1 + (m - 1) \cdot Rel(Y)}$$

Ausgangspunkt

Modell paralleler Tests

Modell paralleler Tests

Pfaddiagramm

Implizierte Kovarianzstruktur

Implizierte Kovarianzmatrix

Identifikation

Testbarkeit

Spearman-Brown-Formel

Herleitung der

Spearman-Brown-Formel

Spearman-Brown-Formel

Reliabilität von $S := Y_1 + \dots + Y_m$: $Rel(S) = \frac{Var(\eta_S)}{Var(S)}$.

Implikationen des Modells paralleler Tests:

$$Var(Y_i) = Var(Y), \quad \forall i = 1, \dots, m.$$

$$Cov(Y_i, Y_j) = Var(\eta), \quad \forall i, j = 1, \dots, m, \quad i \neq j.$$

$$\begin{aligned} Var(\eta_S) &= Var[E(S|U)] = Var[E(Y_1 + \dots + Y_m | U)] \\ &= Var[E(Y_1 | U) + \dots + E(Y_m | U)] = Var(m \cdot \eta) = m^2 \cdot Var(\eta). \end{aligned}$$

$$Var(S) = Var(Y_1 + \dots + Y_m) = m \cdot Var(Y) + m \cdot (m - 1) Var(\eta).$$

Also

$$\begin{aligned} Rel(S) &= \frac{Var(\eta_S)}{Var(S)} = \frac{m^2 \cdot Var(\eta)}{m \cdot Var(Y) + m \cdot (m - 1) Var(\eta)} \\ &= \frac{m \cdot Var(\eta) / Var(Y)}{Var(Y) / Var(Y) + (m - 1) Var(\eta) / Var(Y)} \\ &= \frac{m \cdot Rel(Y)}{1 + (m - 1) \cdot Rel(Y)}. \end{aligned}$$

Ausgangspunkt

Modell paralleler Tests

Modell paralleler Tests

Pfaddiagramm

Implizierte Kovarianzstruktur

Implizierte Kovarianzmatrix

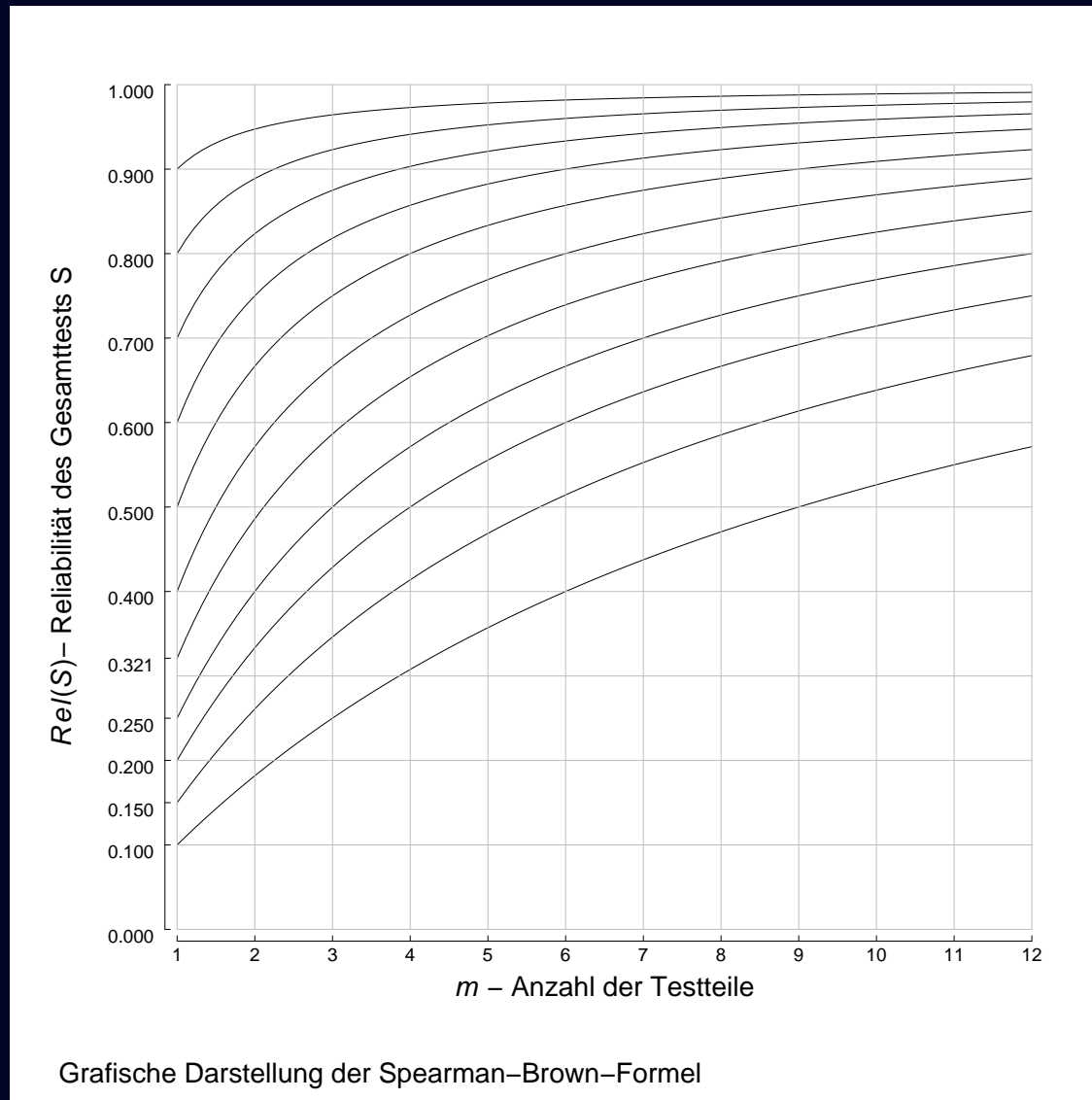
Identifikation

Testbarkeit

Spearman-Brown-Formel

Herleitung der
Spearman-Brown-Formel

Spearman-Brown-Formel



Ausgangspunkt

Modell paralleler Tests

Modell paralleler Tests

Pfaddiagramm

Implizierte Kovarianzstruktur

Implizierte Kovarianzmatrix

Identifikation

Testbarkeit

Spearman-Brown-Formel

Herleitung der

Spearman-Brown-Formel

Spearman-Brown-Formel